Probabilités
Chapitre 12 : Lois de probabilité

Loi normale

Loi binomiale

Épreuve de Bernouilli

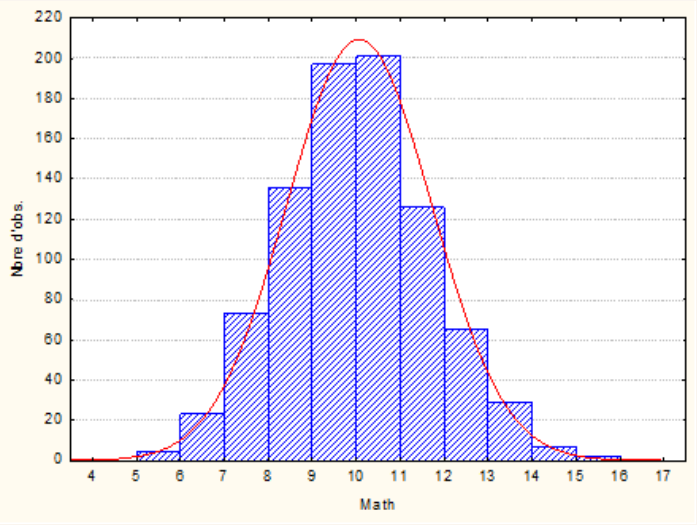
Loi de Poisson

Loi normale

Loi de Gauss ou Laplace-Gauss

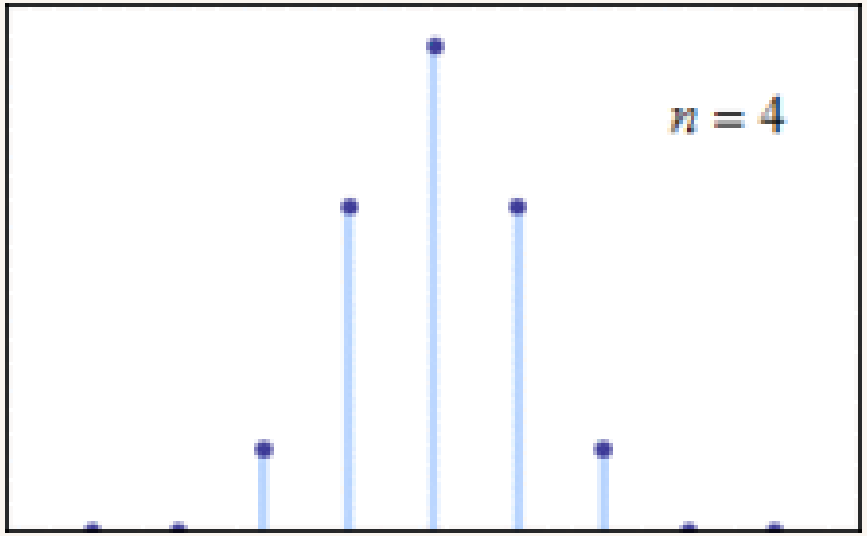
source : Wikipedia : https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_normale

Contexte



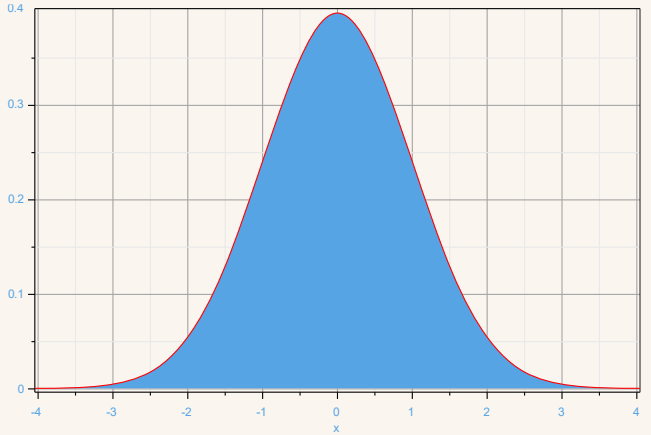
- Les lois normales sont souvent les plus adaptées pour modéliser des phénomènes naturels issus de plusieurs événements aléatoires.
  - Vivant : population humaine, animale, végétale
  - Physique : mouvement brownien, vitesse du vent, précipitations, etc.
  - Métrologie : mesure et dispersion des erreurs
- Parmi les lois de probabilité, les lois normales prennent une place particulière.
  - Elles correspondent au comportement d'une suite d'expériences aléatoires similaires et indépendantes lorsque le nombre d'expériences est très élevé.
  - Grâce à cette propriété, une loi normale modélise de nombreuses études scientifiques comme des mesures d'erreurs ou des tests statistiques.
- La loi normale n'est pas d'application pour tous les phénomènes:
  - Jeu de dés, files d'attente, points des élèves, etc. : autre loi

Courbe en cloche, cas discret



- Ci-contre, une répartition normale pour un nombre fini de valeurs.
- Lorsque le nombre n de variables augmente, la densité de probabilité se rapproche de la courbe en cloche d'une loi normale.

Loi normale centrée réduite



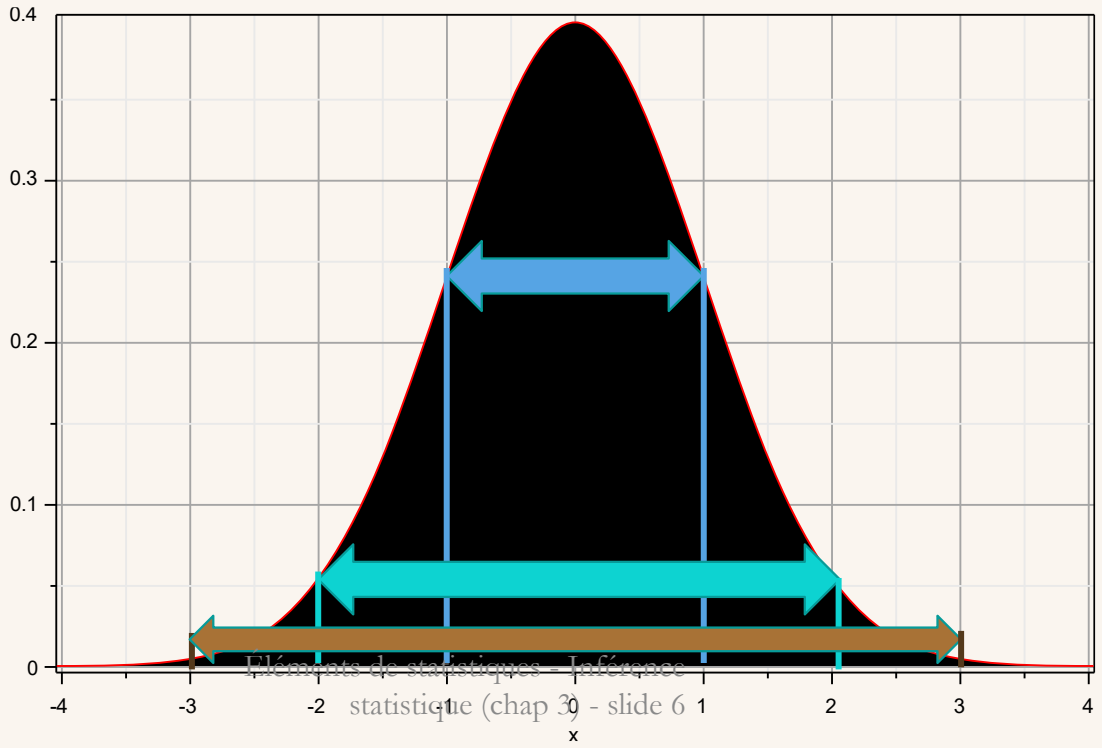
- Loi de probabilité dépendant de deux paramètres
  - son espérance, ou moyenne espérée, un nombre réel noté μ
  - son écart type, un nombre réel positif noté σ.
- Densité de probabilité de la loi normale d'espérance μ, et d'écart type σ :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Courbe de cette densité : "courbe de Gauss" ou "courbe en cloche".
- La loi normale de moyenne nulle ($\mu = 0$) et d'écart type unitaire ($\sigma = 1$) est appelée loi normale centrée réduite.

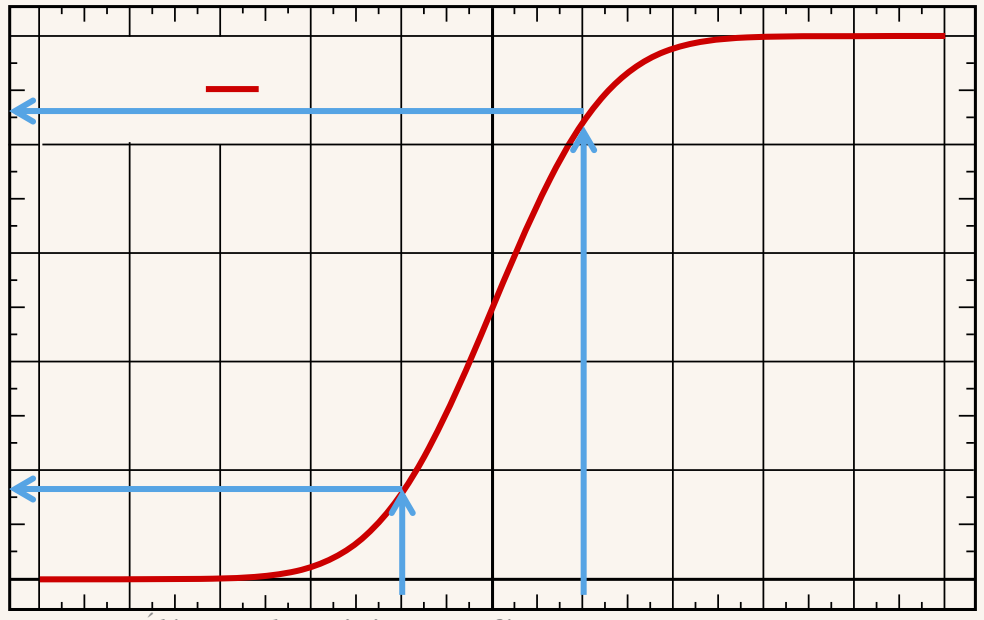
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x)^2}{2}}$$

Densité de probabilité de la loi normale centrée réduite



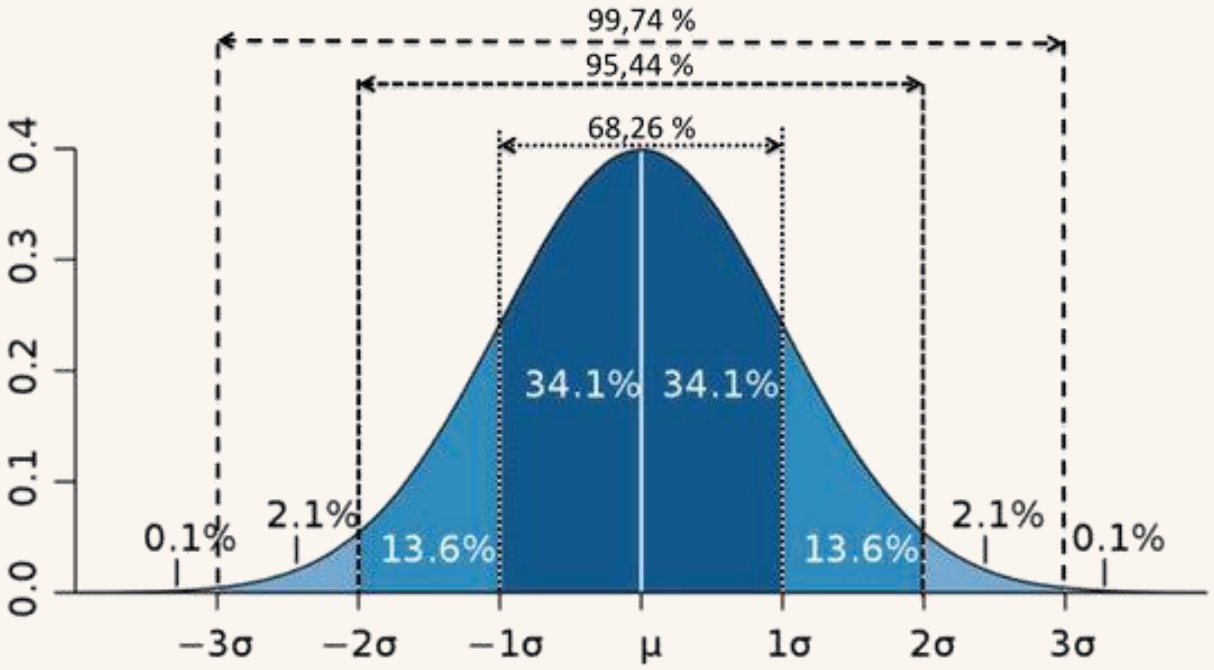
- Environ 68% de la population se trouve dans l'intervalle [-1 ; +1]
- Environ 95% de la population se trouve dans l'intervalle [-2 ; +2]
- Environ 99% de la population se trouve dans l'intervalle [-3 ; +3]

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite



- Dite aussi "loi normale centrée réduite cumulée"
  - Cf chapitre 1, les fréquences cumulées
  - Mathématiquement parlant, c'est l'intégrale de la loi normale centrée réduite.
- Pourcentage de la population dans l'intervalle [-1 ; +1] ?
  = 0,8413 - 0,1587 = **0,6826** = 68%
- Question inverse : Quel intervalle (ou quel écart-type) correspond à 90% de la population ?
  - Comment calculer cet écart-type ?

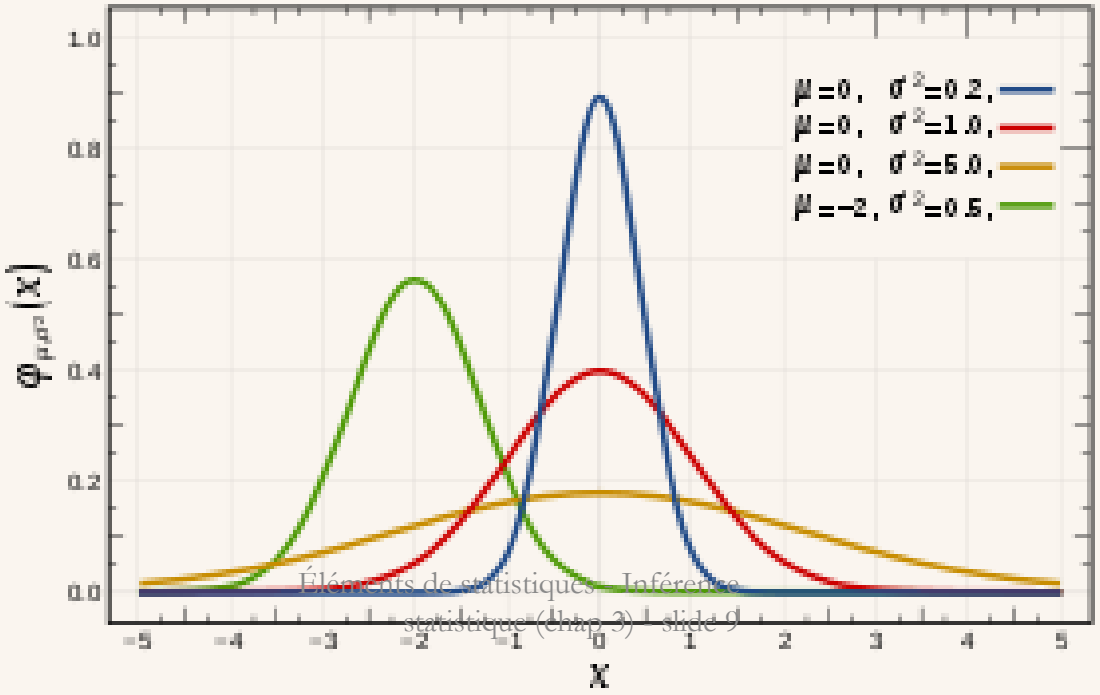
Loi normale : cas général



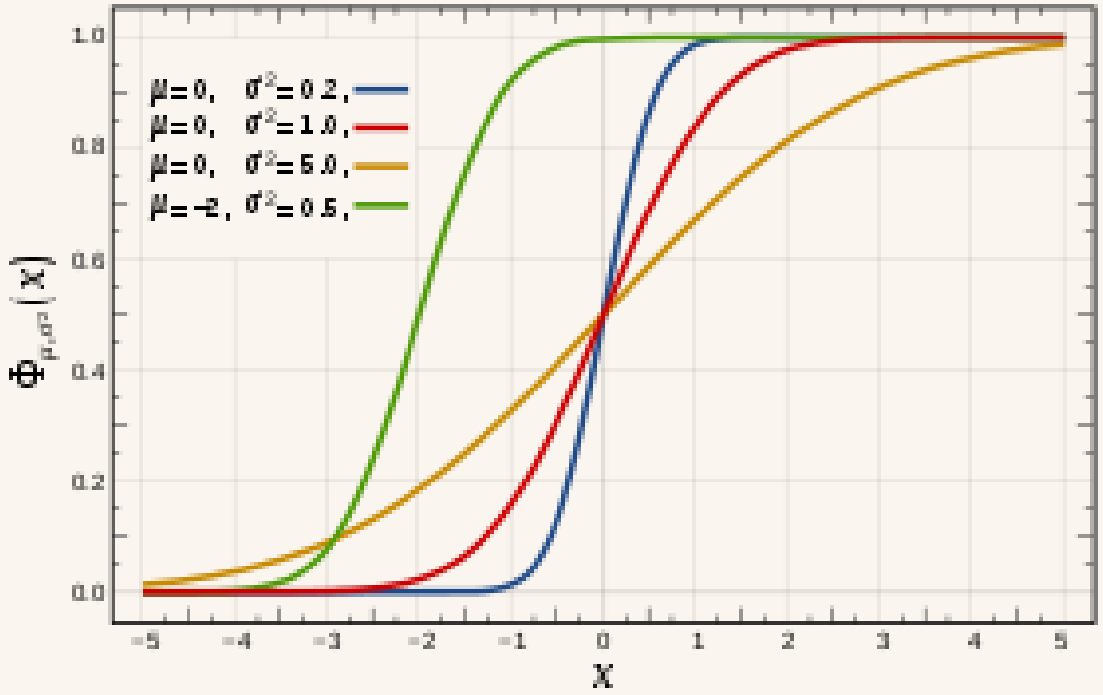
- Espérance : μ
- Écart type : σ.
- Environ 68% de la population dans l'intervalle $[\ \mu - \sigma\ ;\ \mu + \sigma\ ]$
- Environ 95% de la population dans l'intervalle $[\ \mu - 2\sigma\ ;\ \mu + 2\sigma\ ]$
- Environ 99% de la population dans l'intervalle $[\ \mu - 3\sigma\ ;\ \mu + 3\sigma\ ]$

Loi normale : différentes courbes en cloche

Densité de probabilité



Fonction de répartition



En rouge, la loi normale centrée réduite

Autres couleurs : autres lois normales

Loi normale & Tableur

- Pour dessiner une normale avec un tableur, il faut avoir à sa disposition
  - L'espérance **μ** et l'écart-type **σ**
  - La fonction "distribution normale" du tableur :
    - gSheet : **`NORMDIST( x, μ, σ, false )`**
    - Excel FR : **`LOI.NORMALE.N( x, μ, σ, faux )`**
  - L'intervalle des valeurs de **x** appropriées à votre problème
  - Pour chaque valeur de **x**, la valeur de la loi normale correspondante
  - A ce moment-là, on peut tracer la courbe en cloche.
- Par exemple, pour connaître la valeur de la loi normale pour **`x=2, μ=0, σ=2`** utilisez :
  - gSheet : **`NORMDIST( 2, 0, 2, false )`**
  - Excel FR : **`LOI.NORMALE.N( 2, 0, 2, faux )`**
- Cf "complément.xlsx" pour manipuler tous les exemples

Loi normale & Tableur : exemple de la loi normale centrée réduite

- Sur le tableau ci-contre, on a considéré les valeurs suivantes :
  - $\mu = 0$
  - $\sigma = 1$
- Colonne de gauche

  x = [-4 , … , +4]
- Colonne de droite :

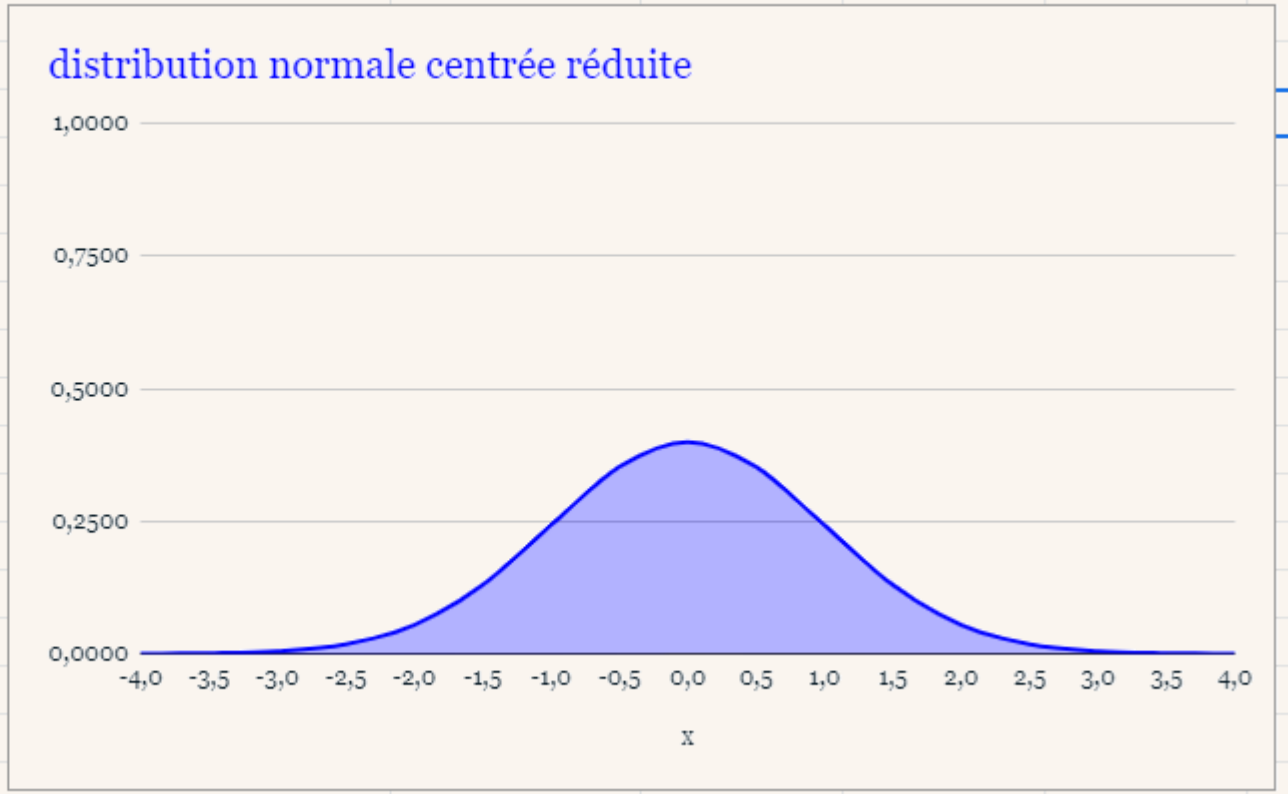
  =LOI.NORMALE.STANDARD.N(x,FAUX)

  (**x** étant remplacé par l'adresse de la cellule contenant la valeur de **x**)
- Pour générer le graphique
  - Sélectionner le tableau
  - Menu : "insertion" / "graphique"

x	distribution normale centrée réduite
-4,0	0,0001
-3,0	0,0044
-2,0	0,0540
-1,0	0,2420
0,0	0,3989
1,0	0,2420
2,0	0,0540
3,0	0,0044
4,0	0,0001

Loi normale & Tableur : exemple de la loi normale centrée réduite

x	distribution normale centrée réduite	=NORMDIST(x ; 0 ; 1 ; false)
-4,0	0,0001	
-3,5	0,0009	
-3,0	0,0044	
-2,5	0,0175	
-2,0	0,0540	
-1,5	0,1295	
-1,0	0,2420	
-0,5	0,3521	
0,0	0,3989	
0,5	0,3521	
1,0	0,2420	
1,5	0,1295	
2,0	0,0540	
2,5	0,0175	
3,0	0,0044	
3,5	0,0009	
4,0	0,0001	



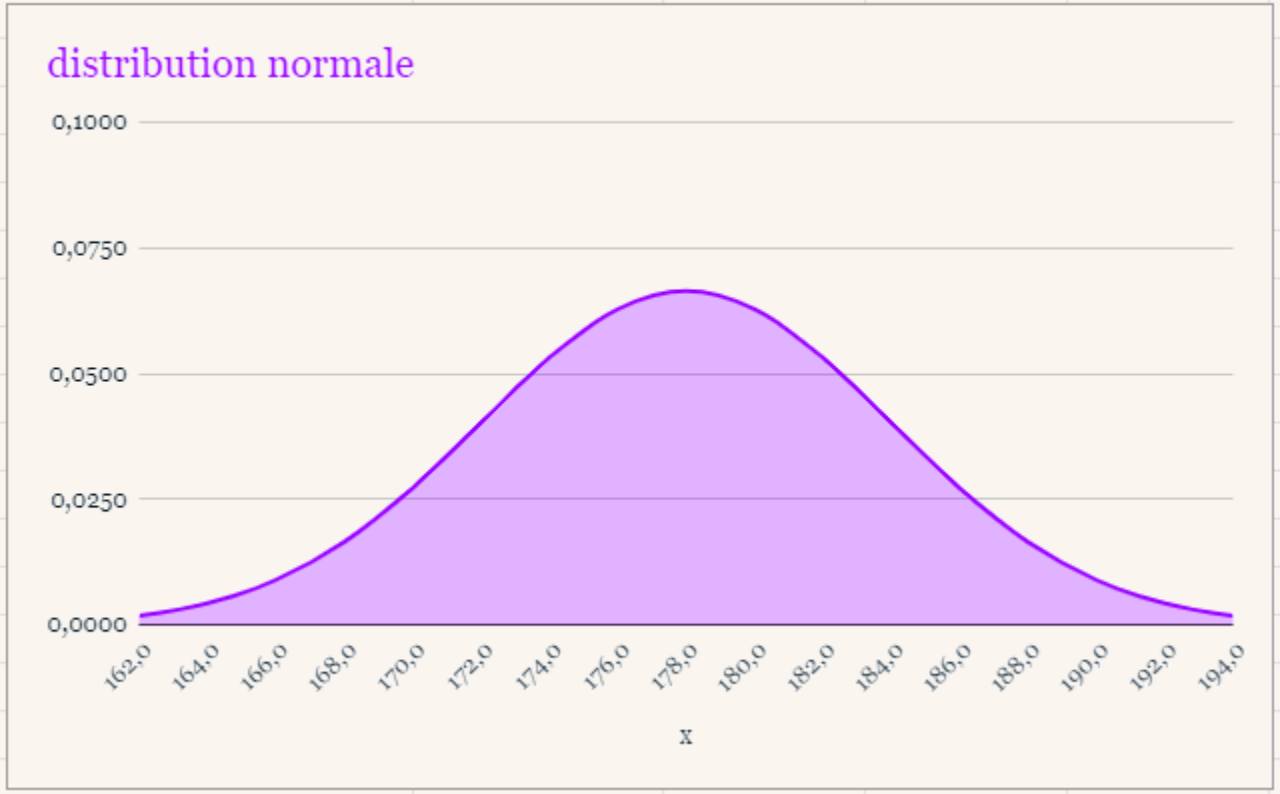
Loi normale & Tableur : exemple de la loi normale représentant la taille d'une population

- Sur le tableau ci-contre, on a considéré les valeurs suivantes :
  - `μ = 178`
  - `σ = 6`
- Colonne de gauche
  `x = [ 162 , … , 194 ]`
- Colonne de droite :
  `=LOI.NORMALE.N(x,178,6,faux)`
  (`x` étant remplacé par l'adresse de la cellule contenant la valeur de `x`)
- Pour générer le graphique
  - Sélectionner le tableau
  - Menu : "insertion" / "graphique"

x	distribution normale
162,0	0,0019
166,0	0,0090
170,0	0,0273
174,0	0,0532
178,0	0,0665
182,0	0,0532
186,0	0,0273
190,0	0,0090
194,0	0,0019

Loi normale & Tableur : exemple de la loi normale représentant la taille d'une population

x	distribution normale	=NORMDIST(x; 178; 6 ; false)
162,0	0,0019	
164,0	0,0044	
166,0	0,0090	
168,0	0,0166	
170,0	0,0273	
172,0	0,0403	
174,0	0,0532	
176,0	0,0629	
178,0	0,0665	
180,0	0,0629	
182,0	0,0532	
184,0	0,0403	
186,0	0,0273	
188,0	0,0166	
190,0	0,0090	
192,0	0,0044	
194,0	0,0019	

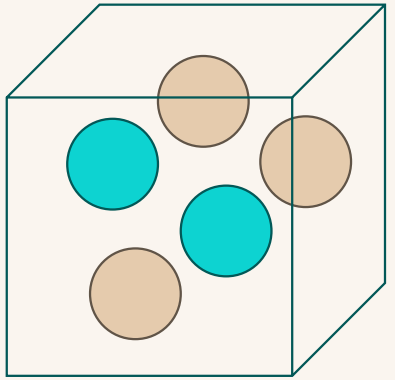


Carl Friedrich Gauss et la courbe en cloche sur un billet de dix Deutsche Mark



Loi binomiale

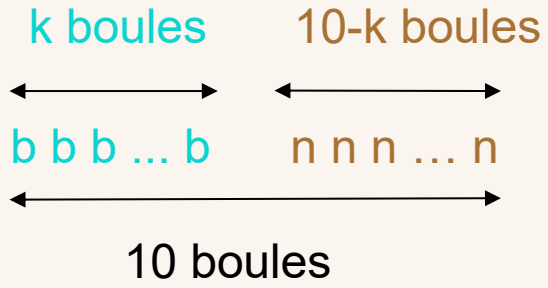
Loi binomiale



- Considérons une urne contenant 2 boules bleues et 3 boules brunes.
- Envisageons l'épreuve consistant à extraire une boule de l'urne.
  - Extraire une boule bleue = cas favorable
  - Extraire une boule brune = cas non favorable
  - Si l'épreuve est réitérée, alors avant tout la boule tirée est remise dans le sac.
- Cette expérience aléatoire ne comprend que 2 éventualités :
  - événement favorable de probabilité $p = 2/5$
  - événement contraire de probabilité $q = 1-p = 3/5$
- Soit X, une variable aléatoire définie comme suit :
  nombre de boules bleues sorties au cours d'un tirage.
- Loi de probabilité de X : X peut prendre ces 2 valeurs :
  - 1 avec la probabilité 2/5
  - 0 avec la probabilité 3/5

Loi binomiale

- Effectuons cette même opération 10 fois d'affilée.
- Nommons X le nombre de boules bleues extraites.
  - X est donc une variable aléatoire qui peut prendre la valeur 0, 1, 2, ..., ou 10.
- Si on veut connaître la loi de probabilité de X, il faut connaître la probabilité de chacune des valeurs de X.
- Cherchons la probabilité attachée à l'une de ces valeurs *k*
  - On a extrait *k* boules bleues après 10 tirages
  - Donc on a extrait *10 - k* boules brunes.



Loi binomiale

- La probabilité de cet événement est égale au produit des probabilités relatives à chacun des 10 événements le composant (ceux-ci étant indépendants)

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{k} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{10-k}$$

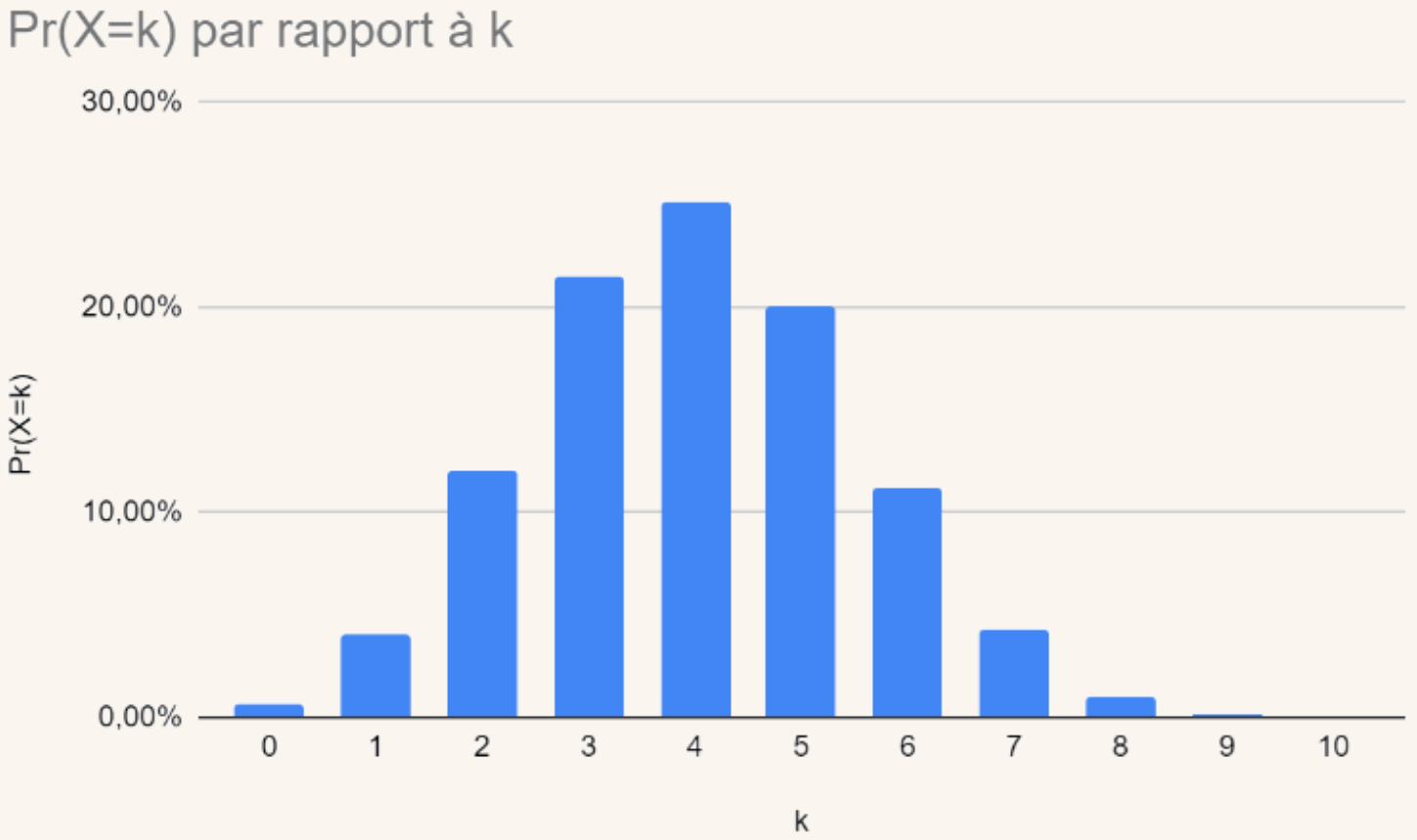
- Mais cet événement peut se produire de différentes façons, selon l'ordre dans lequel les boules sont extraites.

$$\Pr(X = k) = C_{10}^{k} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{k} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{10-k}$$

$$C_{10}^{k} = \frac{10!}{k!\ (10-k)!}$$

Loi binomiale

$$\Pr(X=k) = C_{10}^{k}.(p)^{k}.(q)^{10-k}$$



MS Excel : =LOI.BINOMIALE.N(k; n; p; FAUX)

Loi binomiale et schéma de Bernoulli

- Une épreuve de Bernoulli est une expérience à deux issues : soit le succès, soit l'échec.
- Un schéma de Bernoulli est la répétition de n épreuves de Bernoulli consécutives, avec remise, indépendantes les unes des autres et pour chacune desquelles la probabilité de succès est la même.
- La loi binomiale est la loi de probabilité liée à la variable aléatoire X déterminant le succès d'un schéma de Bernoulli.
- Ainsi pour un schéma de Bernoulli reprenant n épreuves, la loi binomiale est définie par

$$B(n,p) = \Pr(X = k) = C_n^k . (p)^k . (1-p)^{n-k}$$

Loi de Poisson

Loi de Poisson :

- Cas "limite" de la loi binomiale.
- La loi de Poisson peut être utilisée lorsque le produit de n (nombre de tirages) par p (probabilité de l'événement favorable) est de l'ordre de quelques unités.
  - n : souvent très élevé
  - p : souvent très petit
- $\lambda = n.p$: la valeur moyenne que l'on devrait observer.

$$\Pr(X = k) = \left(\frac{\lambda^k}{k!}\right).e^{-\lambda} \quad \text{où } e = 2.71$$

Loi de Poisson : exemple 1

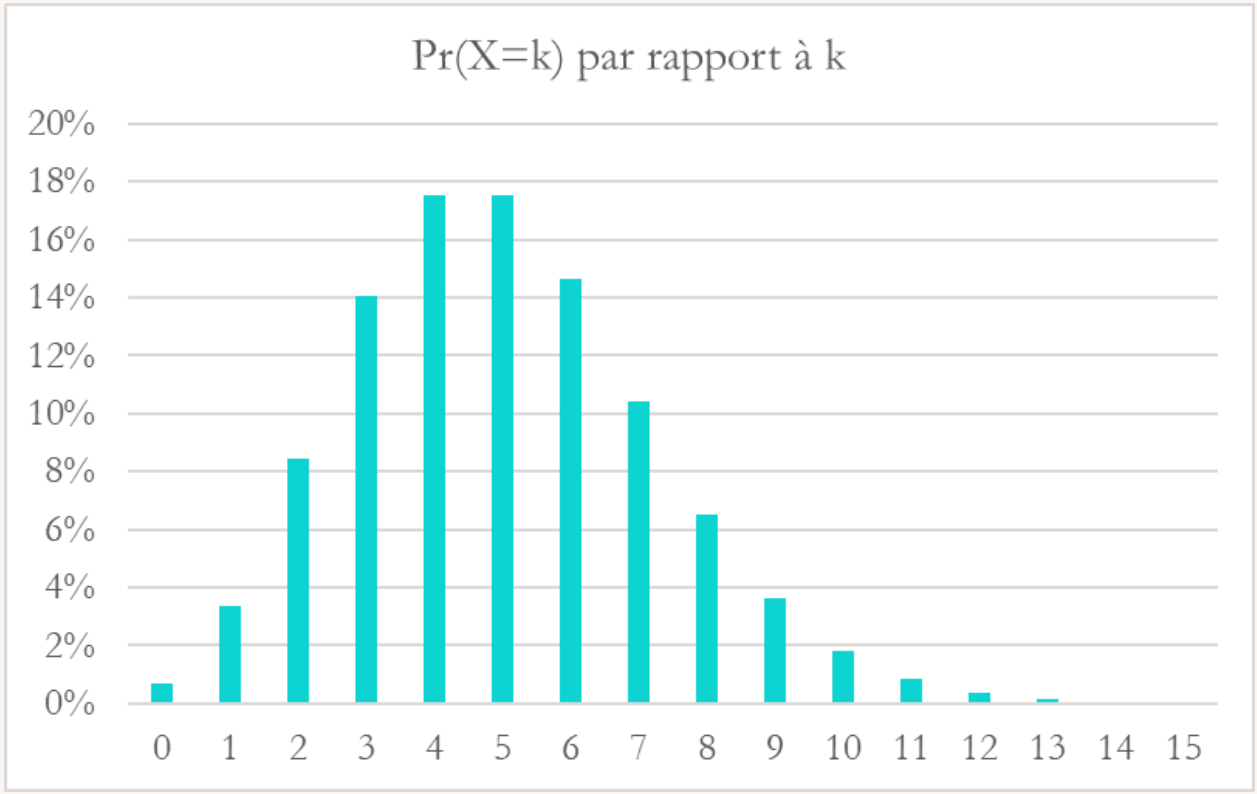
- Supposons une urne contenant 1.000 boules dont 1 est bleue et les 999 autres brunes. La probabilité d'extraire cette boule bleue est de 0,001, càd très faible.
- n = nombre de tirages = 5000
- p = probabilité de tirer la boule bleue = 0,001
- $\lambda = n.p$ = valeur moyenne = 5000 * 0,001 = 5
  - Sur 5000 tirages, on tirera en moyenne 5 fois la boule bleue.
  - Mais on peut la tirer seulement 3 ou 4 fois, ou même 6 ou 7 fois
  - cf graphique de la page suivante

Loi de Poisson : exemple 1

- Distribution théorique de ce tirage

$$\Pr(X = k) = \left(\frac{5^k}{k!}\right).e^{-5}$$

- Dans 17,5% des cas, on tirera 5 fois la boule bleue
  - 17,5% * 5000 tirages = 875 tirages
- Dans 6,5% des cas , on tirera 8 fois la boule bleue
  - 6,5% * 5000 tirages = 325 tirages



MS Excel : =LOI.POISSON.N(k; λ; FAUX)

Loi de Poisson : exemple 2

- Un central téléphonique veut évaluer le nombre de coups de téléphone qu'il reçoit en une minute, de façon à être en mesure d'améliorer la qualité de son service (par ex. augmenter le nombe d'installations ou d'opérateurs).
- Divisons le temps en fractions très petites. Il y en a de deux sortes :
  - Celles où il se produit un appel
  - Celles où il ne s'en produit pas.
- Nous avons donc :
  - Une population très grande de N temps élémentaires
  - Pour P d'entre eux, il se produit un appel
  - Pour Q, il ne s'en produit pas.
  - Donc, $P + Q = N$ et $P < N$, et même "beaucoup plus petit"
- Quelle est la valeur de N ? Peu important … disons "très grand".

Loi de Poisson : exemple 2

- Comment trouver les différentes valeurs de X ?
- Nous allons faire une évaluation expérimentale en comptant le nombre d'appels pendant une minute et en répétant cette expérience 600 fois.
  - "600 fois" dure 600 * 1 min = 600 min = 10 heures

Nombre d'appel	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nombre minutes	17	41	90	116	118	96	62	35	11	9	4	1
Proba Observée	0.028	0.068	0.150	0.193	0.196	0.160	0.103	0.058	0.018	0.015	0.006	0.001

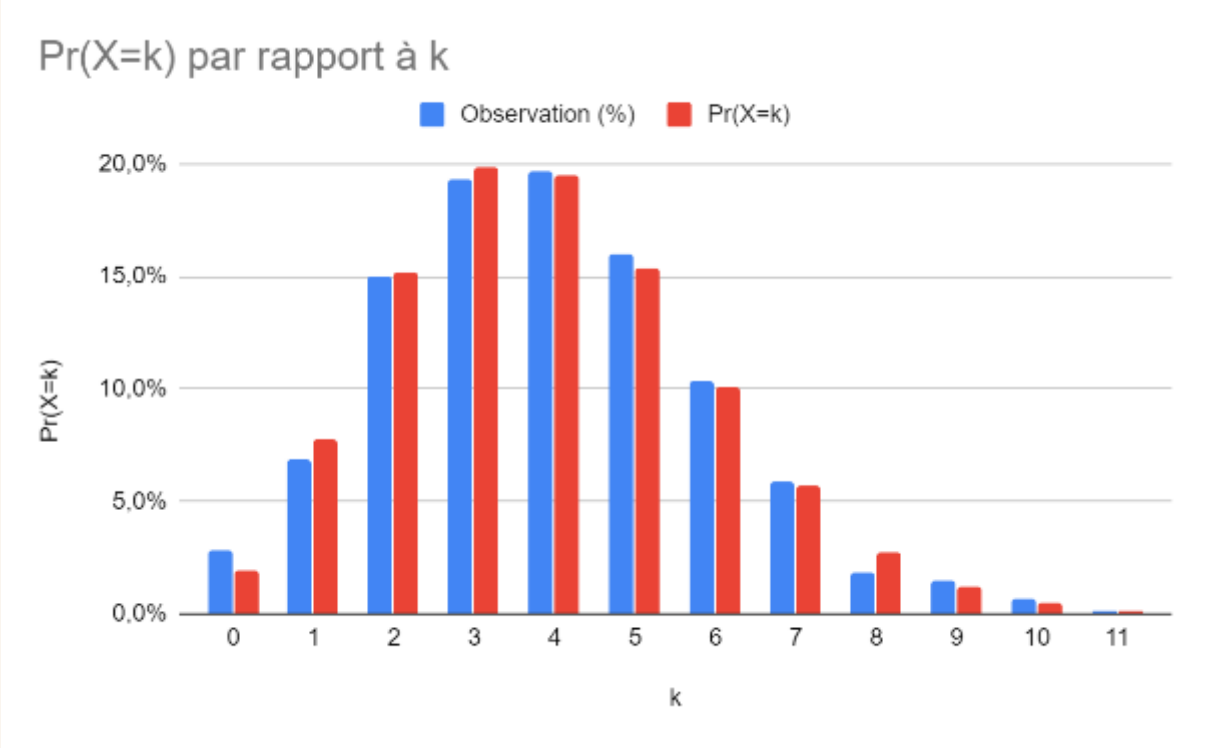
Loi de Poisson : exemple 2

- Sachant que pour une loi de Poisson, la valeur moyenne est égale à λ, il est utile de l'estimer

$$\hat{\lambda} = E(X)$$
$$= 0 * 0{,}028 + 1 * 0{,}068 + 2 * 0{,}150 + \cdots + 10 * 0{,}006 + 11 * 0{,}001 = 3{,}915$$

Nombre d'appel	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Proba théorique	0.0202	0.0789	0.1539	0.2001	0.1951	0.1522	0.0989	0.0551	0.0269	0.0116	0.0045	0.0016
Proba observée	0.028	0.068	0.150	0.193	0.196	0.160	0.103	0.058	0.018	0.015	0.006	0.001

Loi de Poisson : exemple 2



Nombre d'appel	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Proba théorique	0.0202	0.0789	0.1539	0.2001	0.1951	0.1522	0.0989	0.0551	0.0269	0.0116	0.0045	0.0016
Proba observée	0.028	0.068	0.150	0.193	0.196	0.160	0.103	0.058	0.018	0.015	0.006	0.001

Loi de Poisson : exemple 2

- Il est utile de calculer les probabilités cumulées afin d'en tirer des enseignements, tels que :
  - En moyenne, cette agence reçoit 3,915 appels à la minute (disons 4).
  - Il y a 95% de chances d'avoir maximum 7 coups de téléphone en une minute.

Nombre d'appel	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Proba cumulée	0.0202	0.0991	0.2530	0.4531	0.6482	0.8004	0.8993	0.9544	0.9813	0.9929	0.9974	0.9990