Probabilités
Chapitre 11 : Variable aléatoire

loi de probabilité

gain

variable finie

variable infinie

variable discrète

variable continue

fonction de répartition

Introduction

- Soit deux sacs contenant chacun une boule rouge et une boule blanche.
- Le jeu consiste à tirer successivement une boule dans chacun des sacs.
- Chaque tirage sera noté R pour la boule rouge et B pour la blanche.
- Un gain est attribué suivant le combinaison de boules tirées.

(R,R)	⟶	100€
(R,B)	⟶	-60€
(B,R)	⟶	-60€
(B,B)	⟶	40€



- Ceci est la définition d'une application de l'ensemble des résultats aléatoires d'une expérience vers un nombre.

Variable aléatoire

- variable aléatoire
  - Application de l'ensemble des événements élémentaires sur R (ensemble des réels).
  - variable aléatoire : une majuscule, souvent X
  - valeurs prises par cette variable : une minuscule
- Par exemple :
  - Tirage d'un dé
  - Nombre de « face » dans 5 lancers de pièce de monnaie
  - Nombre de coups de téléphone reçus en une heure
  - Nombre de pièces défectueuses dans un lot de 100

Loi de probabilité de la variable X

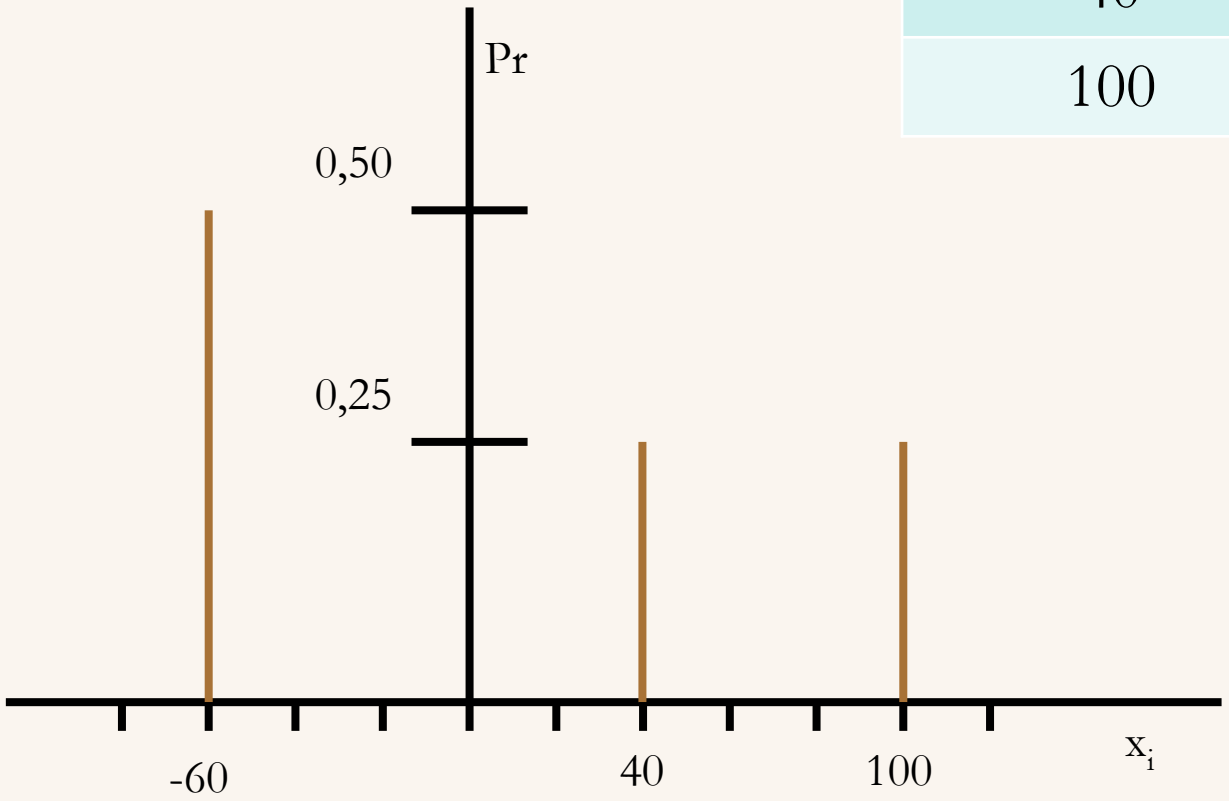
- Dans l'exemple, il y a 3 résultats possibles :
  - Gain de 100€
  - Gain de 40€
  - Perte de 60€

- On associe à chacun de ces gains, une probabilité :
  - 100€ → (R,R) → ¼
  - 40€ → (B,B) → ¼
  - -60€ → (R,B) + (B,R) → ¼ + ¼ = ½

Loi de probabilité	
x_i	$p_i = Pr(X=x_i)$
-60	½
40	¼
100	¼

Diagramme en bâtons

Loi de probabilité	
x_i	$p_i = Pr(X=x_i)$
-60	½
40	¼
100	¼



Types de variable aléatoire

variable aléatoire discrète finie

variable aléatoire discrète infinie

variable aléatoire continue : hors matière

Variable aléatoire discrète finie

- Nombre des valeurs fini
- Exemple précédent
  - Valeurs variable aléatoire =
    - -60
    - 40
    - 100
  - Nombre = 3

Loi de probabilité	
X_i	$p_i = Pr(X=x_i)$
-60	½
40	¼
100	¼

- Loi de probabilité parfaitement définie par l'ensemble des couples (x_i, p_i).

Variable aléatoire discrète infinie

- Nombre de valeurs : dénombrable mais infini
- Loi de probabilité : une relation mathématique entre les deux éléments du couple (x_i, p_i).
- Exemple
  - loi binomiale
  - si nous jetons une pièce *m* fois, la probabilité pour que « face » sorte *j* fois est égale à

$$P_j = C_m^j . (0{,}5)^j . (0{,}5)^{m-j}$$

Variable aléatoire continue

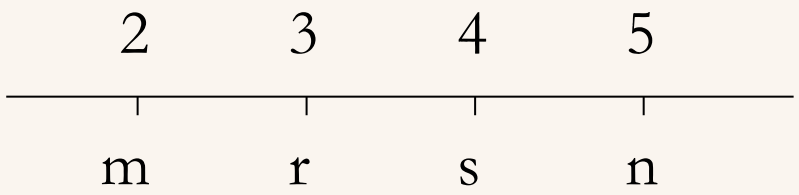
- Si les valeurs de la variable aléatoire sont indénombrables, alors cette variable aléatoire est de type continu.
- Exemple
  - Soit un segment de droite *[m,n]*.
  - Soit un autre segment *[r,s]* tel que *[r,s]* est compris dans *[m,n]*.
  - On choisit au hasard un point *x* de *[m,n]*.
  - La probabilité d'obtenir un point appartenant à *[r,s]* =



$$\frac{longueur[r,s]}{longueur[m,n]}$$

Variable aléatoire continue : exemple

- On choisit un point au hasard dans le segment *[m,n]* = *[2, 5]*.
- On repère ce point par son abscisse (variable aléatoire).

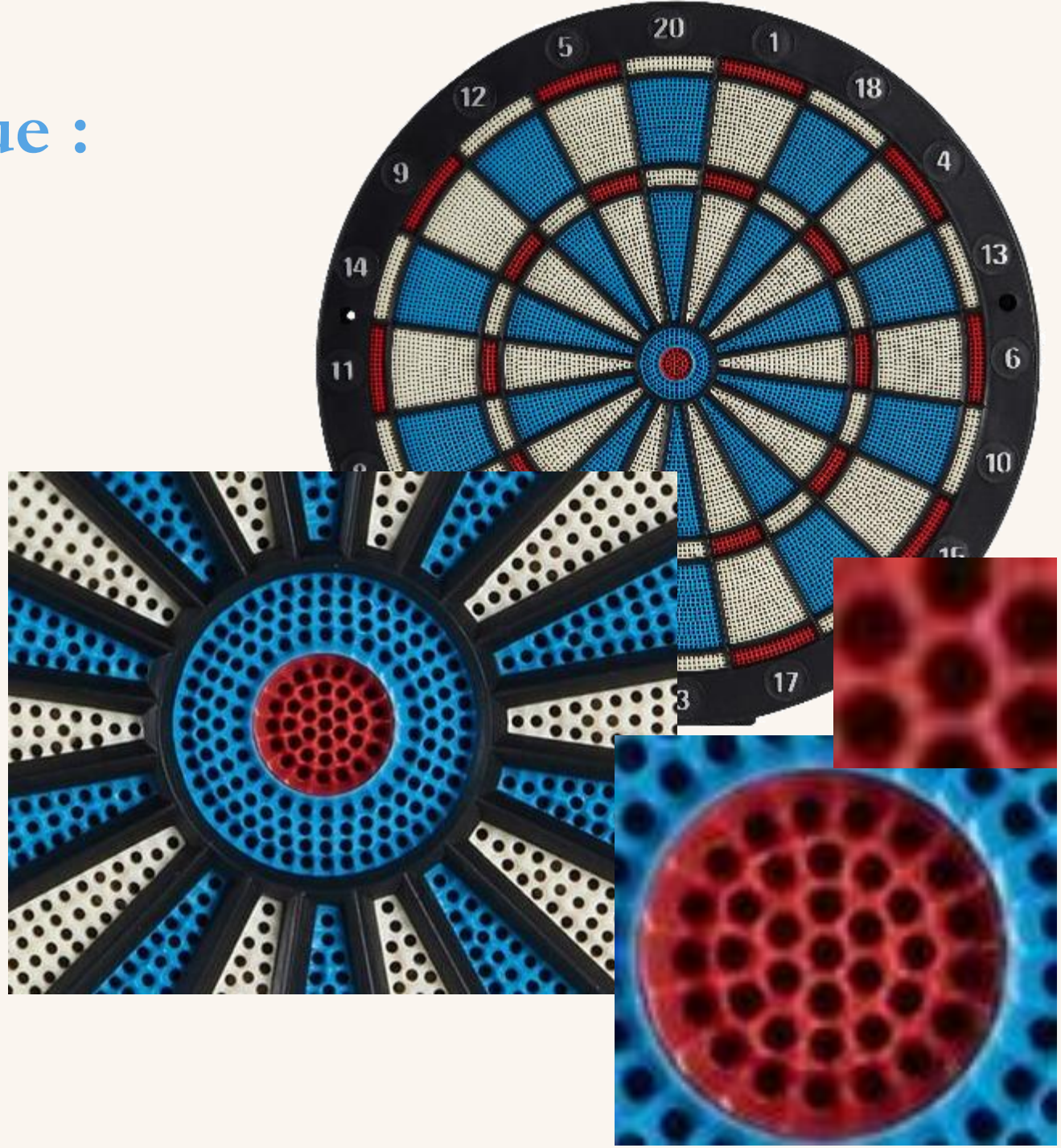


- Probabilité d'obtenir une valeur X appartenant à l'intervalle *[3, 4]* =

$$\Pr(3 \leq X \leq 4) = \frac{longueur[3,4]}{longueur[2,5]} = \frac{4-3}{5-2} = \frac{1}{3}$$

Variable aléatoire continue : exemple

- Probabilité d'obtenir une valeur réelle précise, par exemple 3
  = probabilité d'obtenir exactement le point d'abscisse 3
  = **0**



Variable aléatoire continue

- Soit X pouvant prendre toutes les valeurs dans $I = [u,v]$
- La loi de probabilité est déterminée si on se donne

  $\forall [k,l] \subset [u,v],\ \Pr(k \leq X \leq l) =$ probabilité d'obtenir pour X

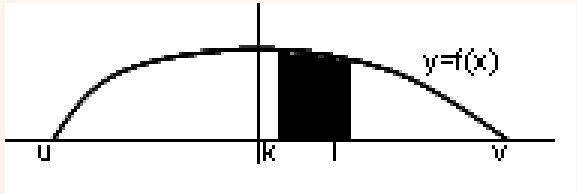
  une valeur x telle que k $\leq$ x $\leq$ l

  sachant que $\Pr(X = x) = 0,\ \forall x$

- Comment calculer ces probabilités ?

Variable aléatoire continue : densité de probabilité

- Considérons une fonction *f(x)*, appelée "densité de probabilité"
  - continue sur l'intervalle *[u,v]*
  - satisfaisant à
    - $f(x) \geq 0$ *pour* $u \leq x \leq v$
    - $f(x) = 0$ *pour* $x < u$ *et* $x > v$
  - telle que l'aire limitée par la courbe d'équation $y = f(x)$ au dessus de l'axe horizontal égale *1*
  - telle que la probabilité d'obtenir, pour X, une valeur x comprise entre *k* et *l* est égale à l'aire limitée par la courbe d'équation $y = f(x)$ et l'axe horizontal.



$$\int_u^v f(x)dx = 1$$

$$\Pr(k \leq X \leq l) = \int_k^l f(x)dx$$

Variable aléatoire continue : exemple

- Calculons la densité de probabilité dans l'exemple précédent.
- Supposons que cette fonction soit du type *ax* (droite de pente *a*). Cette fonction doit répondre à la condition suivante :

$$\int_2^5 axdx = 1$$

$$\int_2^5 axdx = a\frac{x^2}{2}\Big|_2^5 = a\frac{5^2}{2} - a\frac{2^2}{2} = a\frac{25}{2} - a\frac{4}{2} = a\frac{21}{2}$$

$$\frac{21}{2}a = 1 \rightarrow a = \frac{2}{21} \rightarrow f(x) = \frac{2}{21}x$$

Avec cette fonction, quelle est la probabilité suivante ?

$$\int_3^4 \frac{2}{21}xdx = \frac{2}{21}\frac{x^2}{2}\Big|_3^4 = \frac{x^2}{21}\Big|_3^4$$

$$= \frac{4^2}{21} - \frac{3^2}{21} = \frac{16}{21} - \frac{9}{21} = \frac{7}{21} = 1/3$$

Fonction de répartition

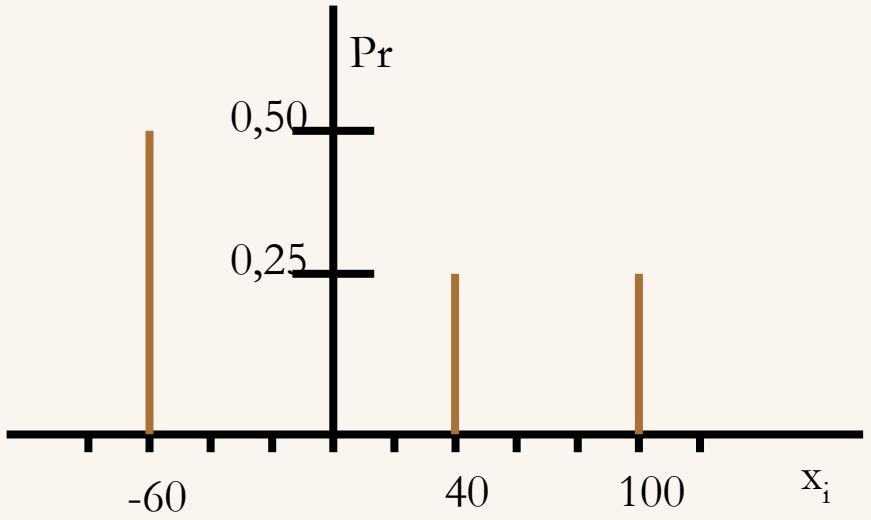
Fonction de répartition d'une variable discrète

Fonction de répartition d'une variable continue : hors matière

Fonction de répartition : variable discrète

- Probabilité d'obtenir
  - Gain ≤ -60 = 0,50
  - Gain ≤ 40 = 0,50 + 0,25 = 0,75
  - Gain ≤ 100 = 0,50 + 0,25 + 0,25 = 1

x	(R,R)	(R,B)	(B,R)	(B,B)
V(x)	100	-60	-60	40



Fonction de répartition : variable discrète

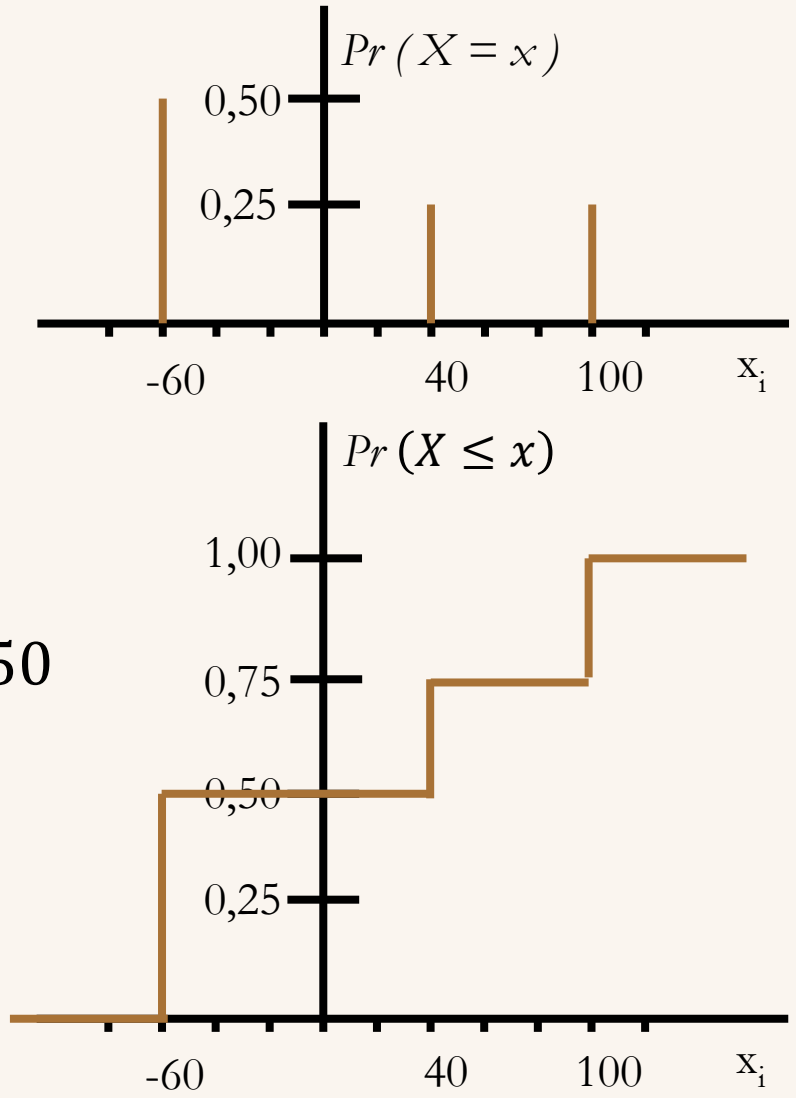
- Quelle est la probabilité d'obtenir un gain inférieur à x ?

$\forall x \in]-\infty, -60[\quad \Pr(X \leq x) = 0$

$\forall x \in [-60, 40[\quad \Pr(X \leq x) = \Pr(X \leq -60) = 0{,}50$

$\forall x \in [40, 100[\quad \Pr(X \leq x) = \Pr(X \leq 40) = 0{,}75$

$\forall x \in [100, +\infty[\quad \Pr(X \leq x) = \Pr(X \leq 100) = 1$



Fonction de répartition : variable continue

- Dans le cas d'une variable aléatoire continue, il est donc impossible de définir la loi de probabilité pour l'ensemble des couples (x_i,p_i), car les probabilités seraient égales à 0.
- On introduit alors la notion de fonction de répartition de la variable aléatoire X :

$$F(x) = \Pr(X \leq x)$$

- Càd la probabilité pour que les valeurs prises par la variable aléatoire soient inférieures à une valeur donnée.

Fonction de répartition : variable continue

- Supposons une variable aléatoire continue dont les valeurs varient de -∞ à +∞. Alors, la fonction de répartition est définie par

$$F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx$$

$$\Pr(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$\forall x \in]-\infty, u[$ $\quad F(X) = 0$

$\forall x \in [u, v]$ $\quad F(X) = \Pr(X < x) = \int_{u}^{x} f(z)dz$

$\forall x \in]v, +\infty[$ $\quad F(X) = 1$

